XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

**Решения заданий регионального этапа, 2 день**

**6.** *Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 ⎯ простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.* (Н. Агаханов)

**Решение**. Пусть наши числа равны *k*, *k*+1 и *k*+2, и ни одно из них не делится на 2022. Тогда если остаток от деления числа *k* на 2022 равен *r* > 0, то остатки от деления на 2022 чисел *k*+1 и *k*+2 равны, соответственно, *r*+1 и *r*+2, а сумма трёх остатков равна составному числу 3*r*+3 = 3(*r*+1). Противоречие.

**Замечание**. Описываемая в условии задачи ситуация возможна. Если первое (наименьшее) из чисел делится на 2022, то числа дают соответственно остатки 0, 1 и 2 при делении на 2022, сумма которых равна простому числу 3.

**7.** *Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?* (Н. Агаханов)

**Ответ**. Существует. **Решение**. Возьмём треугольник *ABC*, где *AB* = *BC* и высота *BH*, проведенная из вершины *B*, равна 2*AC* (очевидно, такой существует). На продолжении стороны *AC* за точку *C* отложим отрезок *CD* = *AC*. В треугольнике *ABD* высота *BH* равна стороне *AD* = 2*AC*, а медиана *BC* равна стороне *AB*. Другим примером служит прямоугольный треугольник, у которого медиана, проведённая из вершины острого угла, образует с катетом, выходящим из той же вершины, угол 30°.

**8.** *Будем называть натуральное число* ***красивым****, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?* (К. Сухов)

**Ответ**. Не может. **Решение**. Очевидно, количество цифр красивого числа делится на 3. Если в десятичной записи красивого числа *x* 3*n* цифр, то оно удовлетворяет неравенству 103*n*−1 < *x* < 3⋅103*n*−1 (\*). Следовательно, произведение двух красивых чисел, записываемых 3*k* и 3*m* цифрами соответственно, лежит между числами 103(*k*+*m*)−2 и 9⋅103(*k*+*m*)−2, а, значит, и между степенями десятки с показателями 3(*k*+*m*)−2 и 3(*k*+*m*)−1. Красивое же число в силу неравенства (\*) лежит между степенями десятки с показателями 3*n*–1 и 3*n*. Поэтому произведение двух красивых чисел не может быть красивым.

**9.** *Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают.* (С. Берлов)

**Решение**. Пусть Петя записал числа *a*1 > *a*2 > … > *a*100, а Вася ⎯ *b*1 > *b*2 > … > *b*100. Если *a*1 > *b*1, то у Васи один из остатков будет *b*1, а у Пети все остатки будут меньше *b*1 ⎯ противоречие. Аналогично приводит к противоречию предположение, что *a*1 < *b*1. Значит, *a*1 = *b*1.

Допустим, мы уже доказали, что *a*1 = *b*1, …, *ak* = *bk* для некоторого *k* ≥ 1. Наборы остатков от деления друг на друга чисел *a*1, …, *ak* у Пети и Васи совпадают, вычеркнем все эти остатки. Если *ak*+1 > *bk*+1, то у Пети среди невычеркнутых остатков есть *k* чисел *ak*+1 ⎯ остатки от деления Петиного числа *ak*+1 на все большие Васины числа, а у Васи все невычеркнутые остатки меньше *ak*+1, так как там либо делимое меньше *ak*+1, либо делитель не превосходит *ak*+1. Аналогично разбирается случай, когда *ak*+1 < *bk*+1. Поэтому *ak*+1 = *bk*+1. Последовательно проводя это рассуждение для *k* = 1, 2, …, 99 (а знакомые с методом математической индукции сразу оформят его как индукционный переход), мы докажем утверждение задачи.

**10.** *В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, …, 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?* (С. Берлов)

**Ответ**. 50. **Решение**. *Пример*. Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки.

*Оценка.* Рассуждаем от противного. Пусть *k* < 50. *Первое доказательство*. Будем считать сдвиги фишек относительно их начальных позиций, причем сдвиг по часовой стрелке считаем с плюсом, против часовой — с минусом. Тогда при обмене двух фишек к сдвигу одной из них прибавляется 1, а из сдвига другой вычитается 1. Пусть после нескольких ходов все фишки сместились на одну позицию по часовой стрелке. Тогда полный сдвиг фишки с номером *k* равен 100*tk*+1, где *tk* — число полных оборотов этой фишки (обороты по часовой стрелке считаются со знаком плюс, а против часовой — со знаком минус). Так как *k* < 50, фишки с номерами 1 и 51 не могли меняться местами, и потому совершили одинаковое число полных оборотов, то есть *t*1 = *t*51. Аналогично, *t*2 = *t*52, …, *t*50 = *t*100. Поэтому сумма всех сдвигов всех фишек равна 100(2*t*1+…+2*t*50+1). Она должна быть равна 0, так как равна 0 сумма сдвигов при каждом ходе. Но она не равна 0, так как сумма в скобках нечетна. Противоречие.

*Второе доказательство*. В каждый момент времени считаем {\it *покрашенной*} дугу от фишки 100 до фишки 1 по часовой стрелке. Так как фишки 100 и 1 нельзя поменять за один ход, каждая конкретная фишка m (2 ≤ *m* ≤ 99) могла попасть на покрашенную дугу или покинуть покрашенную дугу только путём обмена с одной из фишек 1 или 100. Поскольку изначально и в конце фишка *m* не была на покрашенной дуге, она сделала одинаковое количество {\it *входов*} на покрашенную дугу и {\it *выходов*} с покрашенной дуги. При *m* ≤ 50 фишка *m* не могла меняться с фишкой 100, поэтому она могла делать {\it вход} или {\it выход} только путём обмена с фишкой 1. При {\it входе} фишка 1 совершает сдвиг на 1 по часовой стрелке, а при {\it выходе} — на 1 против часовой стрелки. Проведём аналогичные рассуждения для фишек *m* ≥ 51, которые не могут меняться с фишкой 1. Тем самым, мы получаем, что фишки 1 и 100 совершат одинаковый сдвиг по и против часовой стрелки, поэтому они останутся на своих позициях. Противоречие.